MATHEMATIQUES III
OPTION ECONOMIQUE

VENDREDI 9 MAI 1997, de 8 h à 12 h

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Soit $u_1 = e_1 + e_2$. Calculer les coordonnées de $f(u_1)$ dans la base B. Que peut-on en déduire pour u_1 ?
   b) En utilisant la méthode de Gauss, montrer que 1 est l'unique valeur propre de f.
   c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?
2. On considère les éléments de $\mathbb{R}^3$: $u_2 = p\,e_2 + q\,e_3$ et $u_3 = r\,e_1 + s\,e_3$, où p, q, r, s sont des réels.
   a) Déterminer u_2 et u_3 pour que :
   $$f(u_2) = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = 2\,u_2 + u_3\,.$$
   b) Vérifier alors que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   c) Ecrire la matrice A' de f dans la base B'.
   d) Calculer A'^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie) ; en déduire A^{-1}.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) &= x^{1+\frac{1}{x}} = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x} \quad \text{si} \quad x>0 \\ f(0) &= 0. \end{cases}$$

On désigne par C la courbe représentative de f.

1. a) Montrer que f est continue en 0.
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
2. a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln x \leq x+1$.
   b) Calculer $f'(x)$ pour $x>0$ et déterminer son signe. Préciser le sens de variation de f.
3. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Etudier la nature de la branche infinie de C en $+\infty$. On pourra chercher un équivalent de $f(x)-x$ en $+\infty$.
4. a) Montrer que le développement limité à l'ordre 3 de f en 1 est :

$$f(x) = 1+2(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right).$$

   On pourra poser $x=1+t$.
   b) Préciser l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1. Que peut-on dire de T ?
   c) Construire C et T dans un repère orthonormé.

Exercice 3

On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement l'urne $\mathcal{U}_1$ contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne $\mathcal{U}_2$ contient les boules numérotées 3, 4, 5 et 6.
On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans $\mathcal{U}_1$ après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1, 3, 2, 3, 5. Quel est le contenu de $\mathcal{U}_1$ à l'issue du $5^{\text{ème}}$ échange ?

2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance mathématique $E(X_1)$.

3. a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
   b) Calculer la covariance du couple (X_1, X_2).

4. a) Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on a :
   - $P[X_{n+1} = 0] = \frac{1}{6} P[X_n = 1]$
   - Pour tout entier k, $1 \leq k \leq 5$,
   $$P[X_{n+1} = k] = \frac{7-k}{6} P[X_n = k-1] + \frac{k+1}{6} P[X_n = k+1]$$
   - $P[X_{n+1} = 6] = \frac{1}{6} P[X_n = 5]$.

   b) En déduire que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:
   $$E(X_{n+1}) = \frac{2}{3} E(X_n) + 1.$$
   c) Calculer alors $E(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul. On pose :
$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx .$$

1. Calculer I_1.

2. a) Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.
   b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
   c) Montrer que, pour tout $x \in [1, e]$: $\ln x \leq \frac{x}{e}$.
   d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.
   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail